Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului

MIRCEA GANGA

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XII-a M1

Elemente de algebră

Filiera teoretică, profil real, specializarea matematică-informatică (TC + CD)
Filiera vocațională, profil militar M.Ap.N., specializarea-matematică (CD)

EDITURA MATHPRESS

CUPRINS

1. GRUPURI

Acest capitol conține informații despre noțiunea de lege de compoziție (notată generic „ * “) pe o mulțime nevidă (M) și principalele proprietăți ale acesteia. Acest concept este ilustrat prin exemple întâlnite în anii precedenți. Cuplul $(M,*)$ este o structură algebrică: monoid, grup.

Noțiunea de grup este una fundamentală în matematică, având aplicații în diverse domenii: teoria ecuațiilor algebrice și a ecuațiilor diferențiale, teoria relativității, cristalografiei, teoria informației, etc.

Ca grupuri remarcabile figurează: grupurile de matrice, grupurile de transformări (care sunt grupuri infinite), grupuri de permutări, grupul claselor de resturi, grupul rădăcinilor de ordin n ale unității (care sunt grupuri finite) etc.

Se definește conceptul de izomorfism de grupuri. Două astfel de grupuri se bucură de aceleași proprietăți algebrice. Pentru grupurile finite izomorfe tablele lor sunt la fel organizate.

Fiecare concept introdus beneficiază de probleme rezolvate diverse precum și de un set consistent de probleme propuse (cele mai multe fiind date la bacalaureat sau admitere în facultăți în ultimii ani).

Istoric. **Noțiunea de grup a fost utilizată pentru prima dată de matematicianul francez Evariste Galois (1811-1832) (mort în duel la vârsta de 21 ani), care este adevăratul creator al teoriei grupurilor. Ideile teoriei grupurilor „erau în aer“ (cum se întâmplă adesea cu ideile matematice fundamentale) înainte de Galois, și anumite teoreme ale teoriei grupurilor au fost demonstrate sub o formă naivă de Lagrange (1736-1813). Contemporanii lui Galois n-au înțeles și deci nici apreciat lucrările sale geniale. Ei nu s-au interesat decât după apariția în 1870 a cărții lui Jordan „Traité des substitutions et des équations algébriques“. De abia la sfârșitul secolului al XIX-lea în teoria grupurilor, „fantezia a fost definitiv abandonată pentru a face loc unei pregătiri atente a scheletului logic“ (F. Klein „Conferințe asupra dezvoltării matematicilor secolului al XIX-lea“).**

PIONIER AL MATEMATICII

Evariste GALOIS (1811 – 1832)
Matematician francez

Matematicianul englez Arthur Cayley (1821-1895), unul dintre cei mai prolifici matematicieni (cu studii la celebrul Trinity College of Cambridge University, a scris peste 200 de articole) a fost printre primii care a descris grupurile abstracte.

1.1. LEGE DE COMPOZIȚIE INTERNĂ

Conceptul care urmează a fi prezentat l-am întâlnit încă din gimnaziu, fără a-l defini în termenii folosiți în acest paragraf, iar mai târziu, în anii de liceu precedenți, l-am extins pentru alte categorii de mulțimi. Acum vom interpreta lucrurile învățate în ceilalți ani dintr-un punct de vedere mai abstract.

Reamintim că dată fiind o mulțime nevidă M prin produsul cartezian $M \times M$ înțelegem mulțimea tuturor perechilor de elemente (x, y) (prima componentă este x, iar cea de-a doua este y) când $x, y \in M$, adică $M \times M = \{(x, y) | x, y \in M\}$.

Definiție. Fie M o mulțime nevidă. Se numește **operație algebrică binară** (sau **lege de compoziție internă** sau simplu **lege de compoziție**) definită pe M o aplicație $f : M \times M \to M$, care asociază fiecărei perechi $(x, y) \in M \times M$ un unic element $f(x, y) \in M$.

Elementul $f(x, y)$ se numește **compusul lui x cu y**.

Așadar, la orice pereche (cuplu) $(x, y) \in M \times M = M^2$, această operație face să corespundă în mod unic elementul $f(x, y)$ **din aceeași mulțime M**. Uneori în loc de $f(x, y)$ se scrie xfy, dar cel mai des se desemnează operația binară pe M printr-un simbol special:

$$*, \circ, \perp, \top, \cup, \cap, \oplus, \bullet, \ldots .$$

Urmând această cale vom numi $x \cdot y$ (sau simplu xy, fără nici un semn între x și y) **produsul și $x + y$ suma** elementelor $x, y \in M$.

În primul caz vom spune că legea este dată **multiplicativ**, iar în al doilea **aditiv**.

Se înțelege că, în majoritatea cazurilor, aceste denumiri sunt convenționale.

În general, pe o mulțime M se pot defini mai multe operații diferite. Când dorim să punem în evidență una dintre ele vom utiliza parantezele $(M, *)$ și vom spune că operația $*$ conferă mulțimii M o **structură algebrică** sau că $(M, *)$ este un **sistem algebric**.

De exemplu, pe mulțimea $\mathbb{Z}$ pe lângă operațiile $+, \cdot$ (adunarea și înmulțirea numerelor întregi) putem defini și alte operații „derivate":

$x \circ y = x + y - 2xy$, $x * y = -x + y$, $x \perp y = -x - y + xy$ etc. care se obțin cu ajutorul operațiilor $+$ (sau $-$) și $\cdot$. Rezultă astfel structuri algebrice diferite: $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Z}, \cdot), (\mathbb{Z}, \circ), (\mathbb{Z}, *), (\mathbb{Z}, \perp)$.

Așa cum vom vedea în capitolele care urmează, vom clasifica structurile algebrice după:

- **numărul de legi de compoziție;**
- **proprietățile acestor operații.**

Exemple cunoscute de legi de compoziție

1. Adunarea pe $\mathbb{N}$ (mulțimea numerelor naturale) este aplicația $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ care asociază cuplului (x, y) elementul $x + y$ (suma dintre x și y). Vom marca această corespondență prin $(x, y) \to x + y$.

2.**Înmulțirea pe $\mathbb{N}$ este aplicația $\cdot:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ dată de corespondența $(x,y)\to x\cdot y$.**

3.**Adunarea pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (mulțimea matricelor pătratice de ordin n cu elemente numere complexe) este definită prin $+:\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $(A,B)\to A+B$.**

4.**Înmulțirea pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este aplicația definită prin $\cdot:\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $(A,B)\to AB$.**

5.**Reuniunea pe $\mathcal{P}(M)$ (mulțimea părților lui M; reprezintă toate submulțimile lui M) este definită prin: $\cup:\mathcal{P}(M)\times\mathcal{P}(M)\to\mathcal{P}(M)$, $(A,B)\to A\cup B$.**

6.**Intersecția pe $\mathcal{P}(M)$ este definită prin $\cap:\mathcal{P}(M)\times\mathcal{P}(M)\to\mathcal{P}(M)$, $(A,B)\to A\cap B$.**

7. **Compunerea pe $\mathcal{F}(M)$ (mulțimea funcțiilor definite pe M cu valori în M) este aplicația $\circ:\mathcal{F}(M)\times\mathcal{F}(M)\to F(M)$, $(f,g)\to f\circ g$.**

Desigur că exemplele pot continua cu alte legi de compoziție întâlnite în anii precedenți.

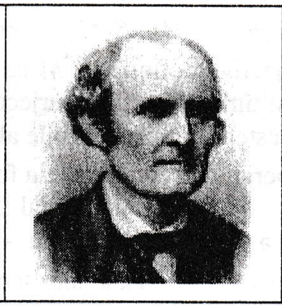
Tabla operației (legii)

Dacă mulțimea M este **finită**, atunci operația algebrică $*$ pe M poate fi dată prin așa numita **tablă a operației** (sau **tabla lui Cayley**). Într-adevăr, dacă $M=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, atunci tabla operației arată astfel:

$*$	a_1	a_2	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_n
a_1	a_1*a_1	a_1*a_2	$\cdots$	a_1*a_j	$\cdots$	a_1*a_n
a_2	a_2*a_1	a_2*a_2	$\cdots$	a_2*a_j	$\cdots$	a_2*a_n
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
a_i	a_i*a_1	a_i*a_2	$\cdots$	a_i*a_j	$\cdots$	a_i*a_n
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
a_n	a_n*a_1	a_n*a_2	$\cdots$	a_n*a_j	$\cdots$	a_n*a_n

UN PIONIER AL MATEMATICII

Arthur CAYLEY (1821 – 1895)
Matematician englez



CONTRIBUȚII

- ***teoria matricelor***
- ***teoria grupurilor***

În acest tabel elementul a_i*a_j este situat pe linia i și coloana j. Dacă notăm $a_{ij}=a_i*a_j$, atunci putem gândi tabla operației ca o matrice $A=\left(a_{ij}\right)_{ij=\overline{1,n}}$.

$\cdot$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

Dacă luăm $M=\{1,-1,i,-i\}$ cu operația de înmulțire, atunci avem tabla legii prezentată alăturat. Alcătuiți tabla legii pe mulțimea M în cazurile:

1) $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $x*y=\min\{x,y\}$;

2) $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $x\circ y=\text{c.m.m.d.c.}\{x,y\}$.

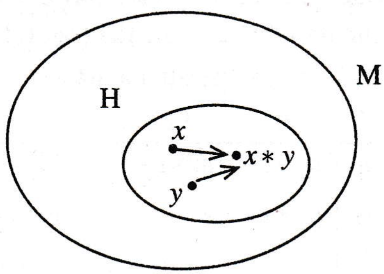
1.2. PARTE STABILĂ

Dacă $(M,*)$ este o structură algebrică, iar H este o submulțime nevidă a lui M, atunci pentru $x.y \in H$ elementul $x*y$ poate să fie în mulțimea H sau să fie în afara ei, adică în $M-H$.

Definiție. Dacă pentru orice $x,y \in H$, compusul $x*y$ aparține tot lui H, atunci spunem că H este **parte stabilă a lui M în raport cu operația $*$.**

Deci, $\varnothing \neq H \subset M$ este parte stabilă a lui M în raport cu $* \Leftrightarrow [\forall x,y \in H \Rightarrow$ $\Rightarrow x*y \in H]$ (fig. 1)

În raport cu adunarea, $\mathbb{N}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Q}$ etc.
Analog, în raport cu adunarea matricelor $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ etc.
Dacă $\mathcal{I}(M), \mathcal{S}(M)$ sunt mulțimea funcțiilor injective definite pe M cu valori în M și respectiv mulțimea funcțiilor surjective de la M la M, atunci acestea sunt părți stabile ale lui $\mathcal{F}(M)$ în raport cu operația de compunere a funcțiilor.



$x,y \in H \Rightarrow x*y \in H$

Fig. 1

Observații. **1)** Adjectivul „stabilă" din noțiunea de „parte stabilă" pentru o submulțime H a lui M în raport cu $*$ vine să precizeze că dacă $x,y \in H$ (sunt două elemente arbitrare din H), atunci și compusul lor $x*y$ rămâne în H.

2) Dacă $H \subset M$ și se consideră o aplicație $*$ pentru H, atunci aceasta nu este neapărat o lege de compoziție. Acest lucru trebuie dovedit. Deci enunțul nu poate fi de forma:

„Fie H o mulțime și legea de compoziție pe H, $x*y=...$".

Exemplificăm acest lucru prin următoarea problemă:
Fie $H=[0,2]$ și aplicația $x*y=xy-x-y+2$, $(\forall)x,y,\in H$.
Arătați că $*$ este o lege de compoziție pe H.
Deci trebuie să arătăm că $(\forall)x,y \in H \Rightarrow x*y \in H$. Ori avem $x*y=(x-1)(y-1)+1$.
Cum $x,y \in H \Rightarrow |x-1| \leq 1, |y-1| \leq 1$.
Prin urmare faptul că $x \in H \Leftrightarrow |x-1| \leq 1$. Deci $x*y \in H \Leftrightarrow |x*y-1| \leq 1 \Leftrightarrow |(x-1)(y-1)| \leq 1 \Leftrightarrow$ $|x-1||y-1| \leq 1$, ceea ce este adevărat pentru că $|x-1| \leq 1, |y-1| \leq 1$.

3) Dacă H *este parte stabilă* a lui M în raport cu $*$, atunci $H \times H \subset M \times M$ și deci putem vorbi de restricția legii $*$ la $H \times H$, care este tot o lege de compoziție. Pentru comoditate vom nota și restricția tot cu $*$.
Deci, dacă H este parte stabilă a lui M în raport cu $*$, atunci legea de compoziție $* : H \times H \to H$ se spune că este indusă de legea de compoziție de pe M. Se mai spune că legea de pe M induce pe H o lege de compoziție.

Probleme rezolvate

1. Fie $M = \mathbb{Z}$, iar $H = 2\mathbb{Z} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (mulțimea numerelor întregi pare) și $H' = 2\mathbb{Z}+1 = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (mulțimea numerelor întregi impare) avem $H, H' \subset \mathbb{Z}$.

R. Pe $\mathbb{Z}$ considerăm legea de compoziție adunarea numerelor întregi. Se constată ușor că H este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu adunarea deoarece din $x, y \in H$, $x = 2k$, $y = 2l$, $k, l \in \mathbb{Z}$ avem $x + y = 2(k + l) \in 2\mathbb{Z}$ în timp ce H' nu este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu adunarea pentru că dacă $x, y \in 2\mathbb{Z}+1$, $x = 2k+1$, $y = 2l+1$, $k, l \in \mathbb{Z}$, atunci $x + y = 2(k + l + 1) \notin 2\mathbb{Z}+1$.

2. Pentru $M = \mathbb{Z}$ considerăm legea de compoziție $x * y = \max(x, y)$. Fie $H = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Atunci H este o parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu $*$.

R. Într-adevăr, acest lucru va reieși din tabla legii pentru H.
Observăm că toate elementele (rezultate din compunere) ce figurează în tablă aparțin lui H. Prin urmare H este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea $*$.

*	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	1	2	3	4
2	2	2	2	3	4
3	3	3	3	3	4
4	4	4	4	4	4

3. Fie $M = \mathbb{R}$ și legea de compoziție $x * y = xy - x - y + 2$. Considerăm intervalele H = (1, 2), H' = (2, 3) submulțimi ale lui $\mathbb{R}$. Să probăm că H este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu $*$, în timp ce H' nu are această proprietate.

R. Într-adevăr, fie $x, y \in H$. Atunci trebuie probat că $x * y \in H \Leftrightarrow 1 < xy - x - y + 2 < 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1 < (x-1)(y-1) + 1 < 2 \Leftrightarrow 0 < (x-1)(y-1) < 1$ ceea ce este evident, deoarece $x, y \in H \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1 < x, y < 2 \Leftrightarrow 0 < x-1, y-1 < 1$, iar de aici $0 < (x-1)(y-1) < 1$.

Pentru afirmația relativă la H' este de observat că luând $x = \frac{5}{2}$, $y = \frac{5}{2}$ din H', rezultă $x * y = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} - \frac{5}{2} - \frac{5}{2} + 2 = \frac{13}{4} \notin H'$. Deci nu pentru orice $x, y \in H' \Rightarrow x * y \in H'$.

4. Fie $M = \mathbb{C}$ împreună cu operația de înmulțire a numerelor complexe și $H = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Să arătăm că H este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea.

R. Fie $x = a + bi$ și $y = c + di$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Atunci $xy = (a + bi)(c + di) = ac - bd + i(ad + bc) \in \mathbb{Z}[i]$, deoarece $ac - bd$, $ad + bc \in \mathbb{Z}$ (operații cu numere întregi).

5. Fie $M = \mathbb{R}$ și legea de compoziție $x \top y = 7xy - 7(x + y) + 8$. Arătați că $H = (1, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu $\top$.

R. Trebuie să arătăm că dacă $x, y > 1$, atunci $x \top y > 1$.
Avem $x \top y = 7(x-1)(y-1) + 1 > 1 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) > 0$, evident.
Altfel. Se pot lua $x, y > 1$ sub forma $x = 1 + \alpha$, $y = 1 + \beta$, $\alpha, \beta > 0$ când $x \top y = 7\alpha\beta + 1 > 1$.

6. Considerăm $M = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ împreună cu operația de înmulțire a matricelor, iar $H = \left\{A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$. Să probăm că H este o parte stabilă a lui M în raport cu înmulțirea.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului

MIRCEA GANGA

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XII-a M1

Elemente de analiză matematică

Filiera teoretică, profil real, specializarea matematică-informatică (TC + CD)
Filiera vocațională, profil militar M.Ap.N., specializarea-matematică (CD)

EDITURA MATHPRESS

CUPRINS

Tiparul executat la *S.C. LUMINA TIPO s.r.l.*
str. Luigi Galvani nr. 20 bis, sect. 2, București
tel./fax 021.211.32.60; tel. 0741.040.408
E-mail: **office@luminatipo.com**
www.luminatipo.com

1.1. PRELIMINARII

Noțiunea de primitivă leagă între ele două concepte fundamentale ale Analizei matematice, derivata şi integrala.

Integrarea este considerată ca operație inversă (într-un anumit sens) **a derivării.**

Propunem în continuare câteva exemple de operații inverse pentru a ilustra unele caracteristici ale acestora.

Exemple.

1. Fiind date două numere reale oarecare a,b, atunci se poate calcula suma lor $s = a + b$. Invers, se pot determina perechile de numere $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ cu suma s cunoscută.

Există o infinitate de astfel de cupluri (sunt situate pe o dreaptă de ecuație $x + y = s$). Deci în acest caz problema are o infinitate de soluții.

2. Dat fiind numărul real b, atunci se poate calcula b^2 (pătratul lui b).

Invers, se poate găsi un număr real pozitiv r, al cărui pătrat să fie $c \geq 0$. Deci $r^2 = c$, iar de aici $r = \sqrt{c}$ (rădăcina pătrată a numărului pozitiv c). Aici dacă $c < 0$, nu există număr real r pentru care $r^2 = c$. Deci problema n-are soluție. Pentru $c \geq 0$. avem răspuns favorabil (numărul r este unic).

3. Fiind dată o dreaptă d în plan şi $A \notin d$, prin proiecția ortogonală a lui A pe d se înțelege punctul $A^* \in d$ astfel încât $AA^* \perp d$. Invers, se poate cerceta dacă există aplicația inversă celei descrise. Adică pentru $A^* \in d$, există un punct A din plan pentru care proiecția lui să fie A^*? Se constată că există o infinitate de puncte (toate punctele de pe dreapta d', care trece prin A^* şi $d' \perp d$).

1.2. DERIVATE

În orice curs de Analiză matematică capitolul **Primitive** urmează celui care se referă la **Derivate.** Este deci util să fie cunoscut acest din urmă capitol.

Vom reaminti principalele operații cu funcții derivabile.

Fie $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, două funcții derivabile. Atunci:

1) $f+g$ este derivabilă și $(f+g)'=f'+g'$
(Sumă de funcții derivabile este o funcție derivabilă)

---

2) αf este derivabilă și $(\alpha f)'=\alpha f'$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
(Înmulțirea unei funcții derivabile cu o constantă este o funcție derivabilă)

---

3) fg este derivabilă și $(fg)'=f'g+fg'$
(Produs de funcții derivabile este o funcție derivabilă)

---

4) $\frac{f}{g}$ este o funcție derivabilă și $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$, $g\neq 0$
(Cât de funcții derivabile este o funcție derivabilă în punctele $x, g(x)\neq 0$)

---

5) $f\circ g$ este o funcție derivabilă și $(f\circ g)'=f'(g)\cdot g'$
(Compunere de funcții derivabile este o funcție derivabilă)

Exerciții rezolvate

Să se calculeze derivatele funcțiilor de mai jos:

1. $f(x)=(2x+1)^{10}, x\in\mathbb{R}$.

R. $f'(x)=10(2x+1)^9(2x+1)'=10(2x+1)^9\cdot 2=20(2x+1)^9$.

2. $f(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5, x\neq -1$.

R. $f(x)=5\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'=5\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4\frac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}=$

$=5\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=10\frac{(x-1)^4}{(x+1)^6}$.

3. $f(x)=\sqrt{x^2-1}, x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

R. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left(x^2-1\right)'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

4. $f(x)=\ln\left(x^4+1\right), x\in\mathbb{R}$.

R. $f'(x)=\frac{\left(x^4+1\right)'}{x^4+1}=\frac{4x^3}{x^4+1}$.

5. $f(x)=\sin x^5, x\in\mathbb{R}$.

R. $f'(x)=\cos x^5\cdot\left(x^5\right)'=5x^4\cos x^5$.

Probleme propuse

1. Să se calculeze derivatele următoarelor funcții, indicând domeniul de definiție și de derivabilitate.

1) $f(x)=\left(3x^2+1\right)^4$; 2) $f(x)=x^2\left(3x^5+x^2+1\right)^3$; 3) $f(x)=\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^5$;

4) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$; 5) $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$; 6) $f(x)=\ln\frac{x}{x^2+1}$; 7) $f(x)=e^{\frac{x}{x+1}}$;

8) $f(x)=2^{x^2}+e^{x^3}$; 9) $f(x)=\sin^3 x$; 10) $f(x)=\sin\sqrt{x}$; 11) $f(x)=\sin x^3\cdot\cos^2 x$;

12) $f(x)=\cos e^x$; 13) $f(x)=\operatorname{tg}(\sin x)$; 14) $f(x)=\left(\sin^3 x+\cos^2 x\right)\cdot\ln x$;

15) $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$; 16) $f(x)=\arcsin\frac{1}{x^2}$; 17) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

18) $f(x)=\operatorname{arctg} e^x$; 19) $f(x)=\ln^2\sqrt{x}$; 20) $f(x)=e^{\sin\left(x^2+x\right)}$;

21) $f(x)=\sin^3\left(\operatorname{arctg}\left(x^2+2x\right)\right)$; 22) $f(x)=\sin^3\left(\sqrt{x^2-x}\right)$; 23) $f(x)=\sqrt{3^{x^2+2x}}$;

24) $f(x)=2^{\arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}$; 25) $f(x)=\left(x^2+2x\right)e^{\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)}$.

2. Se consideră $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; funcții derivabile și

$f(0)=0, f'(0)=1, f(1)=1, f'(1)=0, f(2)=2, f'(2)=1, g(0)=1, g'(0)=2,$

$g(1)=1, g'(1)=0, g(2)=2, g'(2)=1, h(0)=2, h'(0)=1, h(1)=1, h'(1)=2,$

$h(2)=0, h'(2)=2$. Să se calculeze:

1) $(f\circ g)'(0)$; 2) $(f\circ g)'(1)$; 3) $(f\circ g)'(2)$; 4) $(g\circ h)'(0)$; 5) $(g\circ h)'(1)$;

6) $(g\circ h)'(2)$; 7) $(f\circ g\circ h)'(0)$; 8) $(f\circ g\circ h)'(1)$; 9) $(f\circ g\circ h)'(2)$;

10) $(g\circ f\circ h)'(1)$; 11) $(h\circ f\circ g)'(1)$; 12) $(f\circ h\circ g)'(2)$.

1.3. PROBLEME CARE CONDUC LA NOȚIUNEA DE PRIMITIVĂ

Anul trecut la analiză matematică, la calcul diferențial problema centrală a fost de a determina f' dacă se cunoaște f funcție derivabilă (**operația directă**). În acest an la calcul integral problema fundamentală este de a determina funcția F derivabilă dacă se cunoaște derivata sa $F'=f$ (**operația inversă**). La operația directă pentru o funcție derivabilă f avem o unică funcție f'(derivata lui f). La operația inversă pentru o derivată dată f se obține o mulțime infinită de funcții F cu $F'=f$ (orice funcție $F+c$, c constantă, verifică egalitatea $(F+c)'=f$).

Trei probleme, două de geometrie și alta de mecanică, au condus la noțiunea de primitivă

> **1) Problema inversă a tangentelor.**
> **2) Exprimarea ariei printr-o integrală.**
> **3) Legea de mișcare a unui punct material.**

Le analizăm în continuare.

1) Problema inversă a tangentelor

Următoarea problemă de natură geometrică ne conduce la noțiunea de primitivă a unei funcții:

> **Să se determine funcțiile $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care panta tangentei la graficul lui G în punctul $M\big(x,G(x)\big)$ este $g(x)=x^2, \forall x\in\mathbb{R}$.**

Știm din anul precedent că panta tangentei în M la graficul lui G este dată de formula $m_x=G'(x)$. Deci trebuie determinată funcția G care verifică egalitatea $G'(x)=x^2=g(x)$. În cazul în care există G, ea se numește **o primitivă** a lui g pe $\mathbb{R}$.

Aici se constată ușor că $G(x)=\dfrac{x^3}{3}$ este una din funcțiile căutate.

De asemenea, $G_1(x)=\dfrac{x^3}{3}+1$ este soluție pentru $G'(x)=x^2$ și mai general

$G_c(x)=\dfrac{x^3}{3}+c$, $c\in\mathbb{R}$ este soluție. Ecuația $G'(x)=x^2$ se **numește ecuație diferențială**, iar G_1 este **o soluție particulară** a ei, și G_c este **soluția generală** a ecuației diferențiale.

Schematic:

Funcția dată		Se caută funcția
$x \to g(x)$	$\longrightarrow$	$x \to G(x)$ astfel încât $G'(x) = g(x), \forall x$

Să observăm că:

1) funcția G trebuie să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$ și în plus $G'(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

2) funcția $G_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, G_1(x) = G(x) + c, c$ constantă reală, este, de asemenea, o primitivă a lui g (G_1' este derivabilă și $G_1' = (G + c)' = G' + 0 = g$).

2) Exprimarea ariei printr-o integrală

Exemplul care urmează leagă noțiunea de arie cu primitivele unei funcții și constituie un suport pentru înțelegerea proprietăților integralei.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$, iar graficul acestei funcții este parabola $\mathscr{P}$ (Fig.1.a)

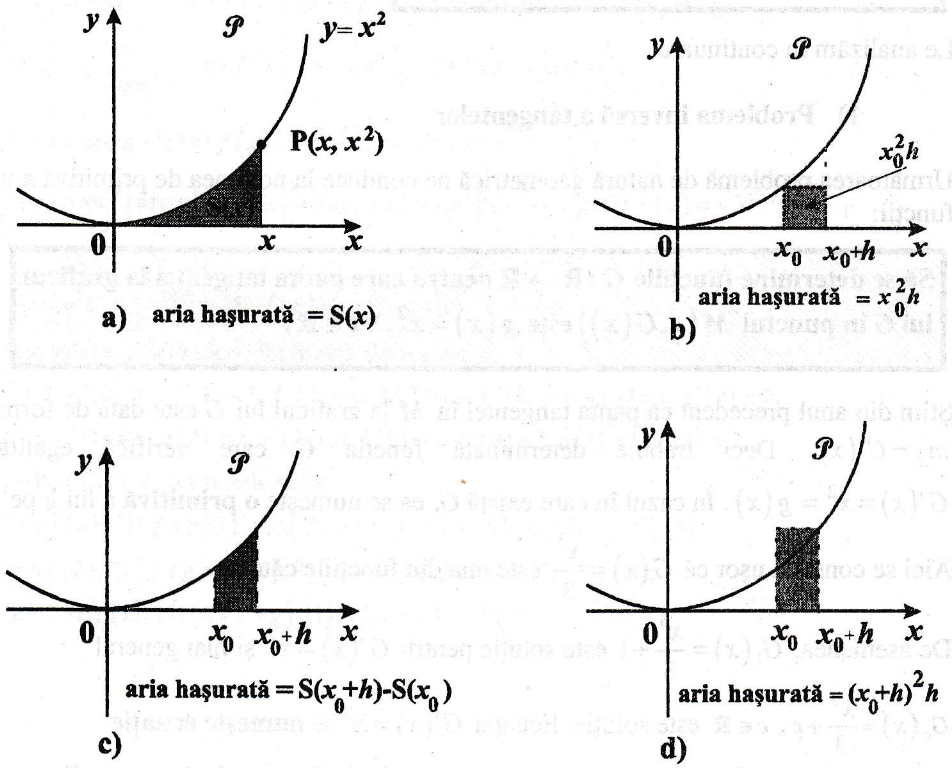


Fig. 1